

## Дифракция Фраунгофера

### 1. Введение.

Начну с вопроса, который достаточно часто задается на экзамене. Есть два параллельных экрана. В первом имеется круглое отверстие, и на него падает плоская монохроматическая волна (перпендикулярно экрану). В начальном положении оба экрана совмещены без зазора. Затем второй экран начинают удалять. Нарисовать зависимость интенсивности света на оси, проходящей через центр отверстия и перпендикулярной экранам. Ниже на рисунке этот график приведен. Но нарисовать мало, надо объяснить, почему он такой.



Первая область – область геометрической оптики. На экране мы будем наблюдать равномерную освещенность круга с радиусом отверстия. Но, если копаться в мелочах, то около границы геометрической тени должны появиться полосы, а в области геометрической тени будет наблюдаться спад интенсивности до нуля на очень малом расстоянии от нее. Надо только понимать, что такая картинка будет возникать только в случае, когда неровности края отверстия много меньше длины волны света. Вторая область – область дифракции Френеля, с разбора которой мы начали описания дифракции. Третья область – область дифракции Фраунгофера, о которой и будет эта лекция.

Есть волновой параметр – безразмерная комбинация трех линейных величин, позволяющая оценить в какой из выше перечисленных областей приводится наблюдение. В-первых, длина волны света  $\lambda$ , характеризующая падающий свет. Затем два параметра наблюдения, характерный размер отверстия  $b$  и расстояние от экрана с отверстием до экрана с изображением  $L$ . При дифракции Френеля расстояние от центра дифракционной картинке до края экрана равно  $L + m \frac{\lambda}{2}$ , а до центра отверстия (расстояние между экранами) –  $L$ . Из прямоугольного треугольника находим:

$$L^2 + \frac{b^2}{4} = \left(L + m \frac{\lambda}{2}\right)^2 \Rightarrow b^2 \approx 4m\lambda L \Rightarrow \frac{b^2}{\lambda L} \approx m\lambda$$

Если волновой параметр  $\frac{b^2}{\lambda L} \gg 1$ , мы находимся в области геометрической оптики, если

$\frac{b^2}{\lambda L} \ll 1$ , то в области дифракции Фраунгофера, к изучению которой мы приступаем. При  $\frac{b^2}{\lambda L}$  от величины порядка единицы до пары десятков – дифракция Френеля, которая была рассмотрена в предыдущем материале.

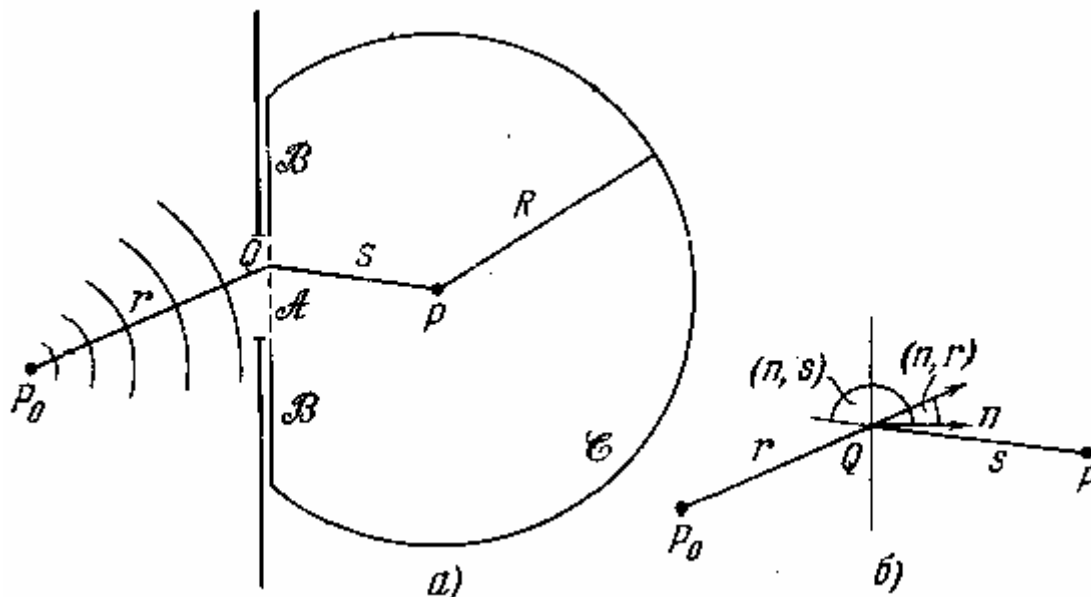
Стоит хотя бы качественно понимать не только как ведет себя интенсивность на оси, но каково ее распределение по радиусу. Количественные расчеты достаточно сложны математически и мы их пропустили в предыдущем материале. Не будем делать этого и здесь. Давайте из физических соображений оценим радиус центрального максимума, когда открыта только первая зона Френеля. Поток энергии, прошедший через отверстие равен  $\pi R_0^2 I$ , интенсивность в точке на оси на экране равна, как вам известно,  $4I$ . Полную энергию в центральном максимуме можно подсчитать как  $4I\pi\left(\frac{R_m}{2}\right)^2 = I\pi R_m^2$ . Приравнявая  $\pi R_0^2 I = I\pi R_m^2$ , находим  $R_m \approx R_0$ . На двойку при такой оценке можно ошибиться. Для нас

важно другое. Ясно, что в области дифракции Фраунгофера ширина максимума будет больше диаметра отверстия.

И последнее замечание. Изученные явления интерференции и дифракции Френеля очень наглядно показывают волновую природу света. Теория же дифракция Фраунгофера необходима для расчета задач инструментальной оптики.

## 2. Теория дифракции Фраунгофера.

Для удобства дальнейшего обсуждения приведу два рисунка и полученную формулу для расчета амплитуды волны в точке наблюдения  $P$ , которая была получена при рассмотрении дифракции Френеля (параграф 8.3.2).



На рис. а) точечный источник находится в точке  $P_0$ . В ниже приведенной формуле косинусы углов приведены на рис. б). В области дифракции Фраунгофера эти величины можно считать постоянными, и расстояния от источника и точки наблюдения до экрана.

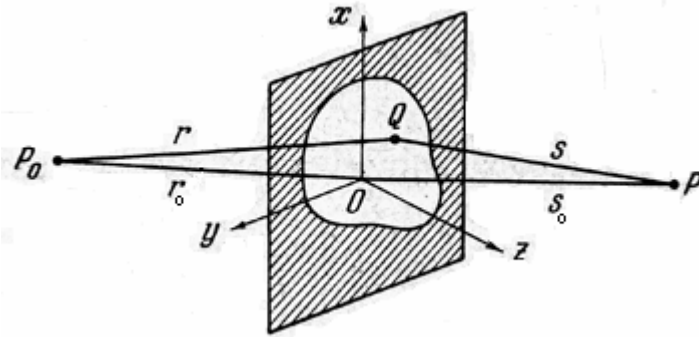
$$U(P) = -\frac{iA}{2\lambda} \iint_A \frac{\exp[ik(r+s)]}{rs} [\cos(n, r) - \cos(n, s)] dS$$

При таких предположениях эти величины можно вынести из-под знака интеграла. Поэтому проще всего перед интегралом поставить некоторую константу. При рассмотрении конкретных примеров мы ее определим. Запишем интеграл, который нам недр вычислить:

$$U(P) = C \iint \exp[ik(r+s)] dS \quad (1)$$

Преобразуем (1) к удобному виду для рассмотрения конкретных задач дифракции. В следующих параграфах будет рассмотрена дифракционная картина от прямоугольного отверстия и длинной щели, а также рассмотрена дифракционная решетка, которая широко используется в спектральных приборах среднего и высокого разрешения.

Проведем две плоскости, параллельные плоскости экрана, одну, в которой расположен точечный источник света, вторую, в которой находится дифракционная картина (точка  $P$ ). Введем декартовы системы координаты так, чтобы оси  $x, y, \xi, \eta$  лежали в выбранных плоскостях, причем координаты  $\xi, \eta$  в плоскости экрана. Перпендикулярные плоскостям оси координат совместим друг с другом. Начало координат  $z = 0$  выберем в плоскости экрана с отверстием. Для пояснения ниже приведен рисунок.



Координаты источника обозначим  $x_0, y_0, z_0$ , координату точки наблюдения  $x, y, z$  (если ось  $z$  общая для всех систем, то  $z - z_0$  ( $z_0 < 0$ ) является расстоянием между экранами с точками  $P$  и  $P_0$ ). Выразим, указанные расстояния на рисунке, через декартовы координаты:

$$r^2 = (x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2 + z_0^2$$

$$s^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2$$

$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$$

$$s_0^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Легко сообразить, что, комбинируя первое и третье уравнения, мы получим:

$$r^2 = r_0^2 - 2(x_0\xi + y_0\eta) + \xi^2 + \eta^2$$

Второе же и четвертое уравнения дают:

$$s^2 = s_0^2 - 2(x\xi + y\eta) + \xi^2 + \eta^2$$

Извлекая квадратные корни из двух последних выражений, и ограничившись линейными членами разложения по координатам отверстия, получим:

$$r = r_0 - \frac{x\xi + y\eta}{r_0}$$

$$s = s_0 - \frac{x\xi + y\eta}{s_0}$$

Напомним, что дифракция Фраунгофера наблюдается в области, когда расстояния от источника и точки наблюдения много больше размеров отверстия. Поэтому сделанные математические упрощения вполне оправданы.

Находим сумму двух последних выражений, так как она стоит в показателе экспоненты интеграла (1):

$$r + s = r_0 + s_0 - \xi \frac{x_0}{r_0} - \eta \frac{y_0}{r_0} - \xi \frac{x}{s_0} - \eta \frac{y}{s_0}$$

Все отношения являются синусами углов. Например,  $\sin \alpha = \frac{x}{s_0}$  и  $\sin \beta = \frac{y}{s_0}$  - это синусы

углов между линией, проведенной из начала координат в точку наблюдения дифракционной картины и нормалью к экрану, совпадающей по направлению с осью  $z$ . Два других отношения дают аналогичные синусы углов с заменой точки наблюдения на точку источника света. В результате после сделанных упрощений под интегралом осталась простая экспонента:

$$U(P) = C \iint \exp[-ik(\xi \frac{x_0}{r_0} + \eta \frac{y_0}{r_0} + \xi \frac{x}{s_0} + \eta \frac{y}{s_0})] d\xi d\eta \quad (2)$$

Вычислением этого интеграла для конкретных отверстий мы и будем заниматься в следующих параграфах.

### 3. Дифракция на прямоугольном отверстии.

Если точечный источник света находится на расстоянии много большем, чем размер отверстия и его смещение от оси также мало, то приближенно можно считать, что на экран с отверстием падает плоская волна, перпендикулярная ему. Для такого случая синусы углов

$\frac{x_0}{r_0}$  и  $\frac{y_0}{r_0}$  можно считать равными нулю. И остается интеграл, который необходимо вычислить;

$$U(P) = C \iint \exp[-ik(\xi \frac{x}{s_0} + \eta \frac{y}{s_0})] d\xi d\eta = C \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-ik(\xi \sin \alpha + \eta \sin \beta)} d\xi d\eta =$$

$$= C \frac{e^{-ik\frac{a}{2}\sin \alpha} - e^{ik\frac{a}{2}\sin \alpha}}{-ik \sin \alpha} \cdot \frac{e^{-ik\frac{b}{2}\sin \beta} - e^{ik\frac{b}{2}\sin \beta}}{-ik \sin \beta} = 4C \frac{\sin(k\frac{a}{2}\sin \alpha)}{ik \sin \alpha} \cdot \frac{\sin(k\frac{b}{2}\sin \beta)}{ik \sin \beta}$$

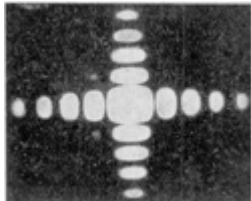
Последнее выражение для дальнейшего удобней записать в более симметричной форме, переобозначив постоянную перед интегралом;

$$U(P) = C \frac{\sin(\frac{ka}{2}\sin \alpha)}{\frac{ka}{2}\sin \alpha} \cdot \frac{\sin(\frac{kb}{2}\sin \beta)}{\frac{kb}{2}\sin \beta} \quad (3)$$

Распределение интенсивности на экране, на котором наблюдается дифракционная картина, находится как квадрат амплитуды (3):

$$I(\alpha, \beta) = I(\sin \alpha, \sin \beta) = I_0 \frac{\sin^2(\frac{ka}{2}\sin \alpha)}{(\frac{ka}{2}\sin \alpha)^2} \cdot \frac{\sin^2(\frac{kb}{2}\sin \beta)}{(\frac{kb}{2}\sin \beta)^2} \quad (4)$$

В последнем выражении  $I_0 = I(\alpha = 0, \beta = 0)$  нормировочная константа и, конечно, не является интенсивностью падающей плоской волны на отверстие,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ . Полученное выражение для большей наглядности лучше считать не функциями углов, а их синусов, то есть свести к графику хорошо известной функции  $y = \frac{\sin^2 x}{x^2}$ . Эта функция в нуле имеет



«главный максимум», последующие максимумы при  $x = m\pi$ ,  $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$  убывают за счет быстрого роста знаменателя. На рисунке приведена фотография дифракционной картины. Надо учесть, что центральный максимум сильно переэкспонирован, чтобы были видны последующие максимумы.

Если нас интересует не только относительное распределение освещенности по экрану, то необходимо отнормировать постоянную  $I_0$ , воспользовавшись законом сохранения энергии. Если интенсивность падающей волны равна  $I$ , то поток энергии, пошедший через отверстие равен  $Iab$ . Будем считать, что нам известен определенный интеграл (он есть в любом приличном справочнике, зачем работать за математиков):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 z}{z^2} dz = \pi \quad (5)$$

Поток энергии, прошедший через отверстие должен быть равен потоку за экраном, то есть мы должны проинтегрировать (4) по координатам  $x, y$  экрана с дифракционным изображением в бесконечных пределах:

$$Iab = I_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\frac{ka}{2}\sin \alpha)}{(\frac{ka}{2}\sin \alpha)^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\frac{kb}{2}\sin \beta)}{(\frac{kb}{2}\sin \beta)^2} dy$$

Преобразуем интегралы к виду (5). Так как  $\sin \alpha$  равен отношению  $x$  к расстоянию между экранами с отверстием и изображением, которое мы обозначим  $L$  (ранее в (2), оно было обозначено  $s_0$ ), то  $dx = Ld \sin \alpha = \frac{2}{ka} Ld(\frac{ka}{2}\sin \alpha)$  и  $dy = Ld \sin \beta = \frac{2}{kb} Ld(\frac{kb}{2}\sin \beta)$ . После подстановки получаем:

$$I_{ab} = I_0 \frac{4L^2}{k^2 ab} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{ka}{2} \sin \alpha\right)}{\left(\frac{ka}{2} \sin \alpha\right)^2} d\left(\frac{ka}{2} \sin \alpha\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{kb}{2} \sin \beta\right)}{\left(\frac{kb}{2} \sin \beta\right)^2} d\left(\frac{kb}{2} \sin \beta\right) = I_0 \frac{4\pi^2 L^2}{k^2 ab}$$

Из последнего выражения находим  $I_0$ :

$$I_0 = \frac{a^2 b^2 k^2}{4\pi^2 L^2} I = \frac{a^2}{\lambda L} \cdot \frac{b^2}{\lambda L} I \quad (6)$$

Из полученного результата следует, что  $I_0/I \ll 1$ , так как при дифракции Фраунгофера волновой параметр меньше единицы. Также видно, что освещенность в центре падает по квадратичному закону. Это качественно и было показано на рисунке, с которого мы начали эту главу.

#### 4. Дифракция на длинной щели.

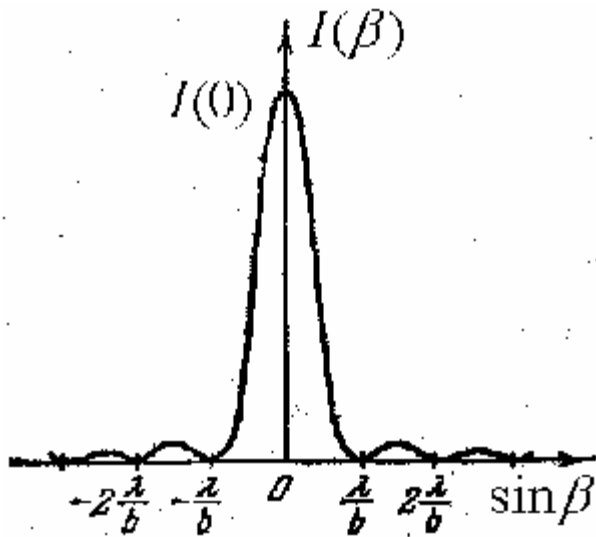
Если один из размеров прямоугольного отверстия несравнимо больше другого (например,  $a \gg b$ ), то в интеграле для вычисления освещенности на экране можно пределы  $\pm \frac{a}{2}$  на бесконечные  $\pm \infty$ . Определенный интеграл даст константу, не важно какую. Важно, что мы сразу можем написать (4), но оставив один множитель:

$$I(\beta) = I(\sin \beta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{kb}{2} \sin \beta\right)}{\left(\frac{kb}{2} \sin \beta\right)^2} \quad (7)$$

Величину новой  $I_0$  мы определим позже. На рисунке показано распределение интенсивности от синуса угла. Функция  $I(\sin \beta)$  имеет нули, когда числитель дроби равен нулю, то есть при условии:

$$\frac{kb}{2} \sin \beta = m\pi, \quad \sin \beta = m\pi \frac{2}{kb} = m \frac{\lambda}{b} \quad (8),$$

где  $m$  целое число. Обратите внимание, что центральный максимум в два раза шире всех остальных. Во-вторых, побочные максимумы для разных длин волн будут видны под разными углами. Это наводит на мысль, что дифракция может быть использована для спектрального анализа падающего света. Щель для этой цели непригодна, так как побочные максимумы ничтожно малы. Но можно взять много одинаковых щелей, расположив их так,



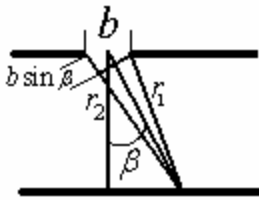
чтобы максимумы для конкретной длины волны от всех щелей были видны под одним углом. Забегая вперед, скажу, что это условие соблюдается для дифракционной решетки, которой будет посвящен отдельный параграф.

Вычислим  $I_0$ . Прошедший поток энергии через щель на единицу ее длины равен  $Ib$ . Далее вычисления совершенно аналогичны тем, которые были сделаны для прямоугольного отверстия:

$$Ib = I_0 \frac{2L}{kb} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{kb}{2} \sin \beta\right)}{\left(\frac{kb}{2} \sin \beta\right)^2} d\left(\frac{kb}{2} \sin \beta\right) = I_0 \frac{2\pi L}{kb}$$

Следовательно,  $I_0 = \frac{ab^2 k}{2\pi L} I = \frac{b^2}{\lambda L} I$ . Первая степень расстояния от щели до экрана, на котором наблюдается дифракционная картина означает, что мы имеем цилиндрические волны. Если вспомнить метод дифрагированных волн, рассмотренный в дифракции Френеля, То нахождения максимумов или минимумов является «детской» задачей. Для примера получим формулу (8). На рисунке показана щель и две волны от ее краев. Если до точки наблюдения

две волны приходят в одной фазе, то будет наблюдаться максимум. Поэтому разность  $r_2 - r_1$  должна быть кратна  $m + \frac{1}{2}$  целым длинам волн. Почему не целому числу волн? Потому, что



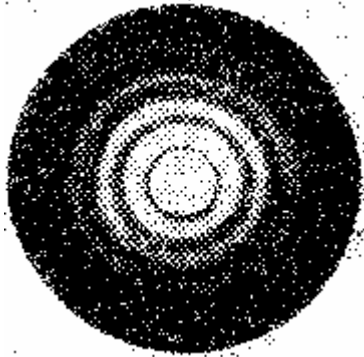
половина волны набегит за счет отражения для  $r_2$  (полная аналогия с разбивкой на зоны Френеля). Находим условия максимумов:

$$r_2 - r_1 = b \sin \beta + \frac{\lambda}{2} = (m + \frac{1}{2})\lambda \Rightarrow \sin \beta = m \frac{\lambda}{b}$$

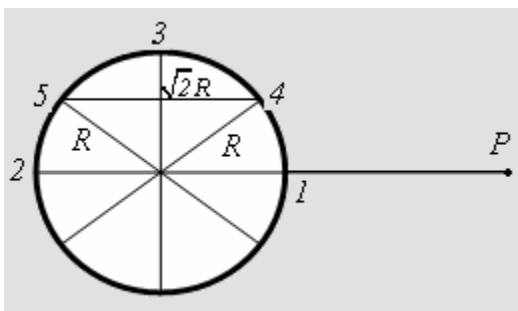
С точки зрения дифрагированных волн качественно просто объяснить, почему такое большое различие в интенсивности для центрального максимума и для побочных. В побочные максимумы приходят только дифрагированные волны от краев щели, так как они находятся в геометрической тени. Вспомните картинку дифракции Френеля от полуплоскости в геометрической тени: достаточно резкое спадание интенсивности. В центральный максимум приходит прямая волна. Именно она и дает вклад в интенсивность.

### 5. Дифракция на круглом отверстии.

Из рассмотрения двух предыдущих примера ясно, что дифракционная картина будет представлять собой чередующиеся светлые и темные кольца с очень интенсивным центральным максимумом по сравнению даже с первым светлым кольцом. Не буду выписывать интеграл, так как его нельзя вычислить, получив ответ в элементарных функциях. На рисунке приведена фотография дифракционной картины с переэкспонированным центральным максимумом. В противном случае колец не было бы видно. Попробуем оценить достаточно грубо радиус первого светлого кольца с помощью дифрагированных волн. На рисунке показан вид сверху на экран с отверстием (по направлению падающей волны). Показано всего шесть точек,



от которых дифрагированные волны приходят в точку наблюдения  $P$ . Теперь будет слишком грубо сложить волны только от точек 1 и 2. Если выбрать точку  $P$  так, чтобы геометрическая разность хода волн была равна  $\frac{\lambda}{2}$ , то для всех других пар она будет меньше.



Когда непонятно как выбрать, самое простое взять среднее из двух крайних значений. Точки 1 и 2 одна крайность, вторая крайность – пара точек, одна из которых находится на бесконечно малом расстоянии от точки 3 в одну сторону по дуге окружности – вторая в другую сторону. От этих точек геометрическая разность хода практически равна нулю. Поэтому для оценки выберем точки 4 и 5, находящиеся на серединах дуг полуокружностей,

расстояние между которыми равно  $b = \sqrt{2}R$ , где  $R$  - радиус отверстия. Остальной расчет аналогичен, расчету для щели;

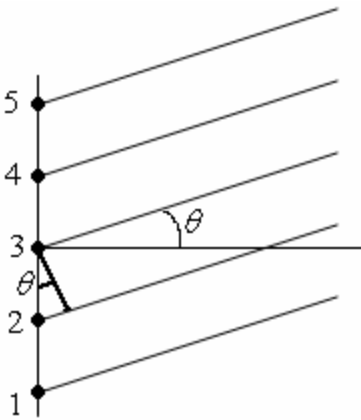
$$r_2 - r_1 = b \sin \theta + \frac{\lambda}{2} = (m + \frac{1}{2})\lambda \Rightarrow \sin \theta = m \frac{\lambda}{b} = m \frac{\lambda}{\sqrt{2}R} = m \frac{\lambda \sqrt{2}}{D} \quad (9)$$

Таким образом, при  $m = 1$  максимум интенсивности первого кольца виден под большим углом, чем первый побочный максимум для щели, так как в данном случае вместо ее ширины мы должны подставлять диаметр отверстия. Сделал оценку и решил посмотреть, а что же дает точный расчет. Оказалось, что «правильный» коэффициент равен 1,64 вместо 1,4. Ошибка меньше 15%. Зато не надо знать спецфункции.

### 6. Многолучевая интерференция. Радарная гребенка.

Материал этого параграфа относится к главе интерференция света. Но так как в моих лекциях ее нет, то, чтобы не отсылать за нужными формулами к учебнику, мы получим их

здесь. На рисунке для его упрощения нарисованы пять точечных источников, расположенных на одной прямой. Источники монохроматические, то есть излучают волны одной длины волны. Наша задача определить в удаленной точке, находящейся на расстоянии  $r$  много большем, чем расстояние между крайними источниками. Расстояния между всеми источниками одинаковое и равно  $d$ . Запишем амплитуду волны для  $n$ -го источника, пренебрегая немного разной геометрической длиной от конкретного источника до точки наблюдения:



$$\frac{A'}{r} \exp[ik(r + nd \sin \theta)] = A_0 \exp[ik(r + nd \sin \theta)] \quad (10)$$

Суммарная амплитуда находится суммированием по источникам:

$$A = \sum_{n=0}^{n=N} A_0 \exp[ik(r + nd \sin \theta)] = A_0 \exp(ikr) \sum_{n=0}^{n=N-1} (e^{ikd \sin \theta})^n = A_0 \exp(ikr) \sum_{n=0}^{n=N-1} q^n$$

Воспользовавшись известной формулой для суммы геометрической прогрессии, получим:

$$A = A_0 \exp(ikr) \frac{1 - q^N}{1 - q} = A_0 \exp(ikr) \frac{1 - e^{iNkd \sin \theta}}{1 - e^{ikd \sin \theta}}$$

Находим интенсивность как произведение  $A$  на  $A^*$  сопряженное:

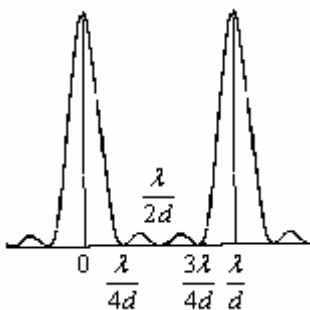
$$I = A_0^2 \frac{2 - (e^{iNkd \sin \theta} + e^{-iNkd \sin \theta})}{2 - (e^{ikd \sin \theta} + e^{-ikd \sin \theta})} = A_0^2 \frac{1 - \cos(Nkd \sin \theta)}{1 - \cos(kd \sin \theta)} = I_0 \frac{\sin^2(\frac{Nkd}{2} \sin \theta)}{\sin^2(\frac{kd}{2} \sin \theta)} \quad (11)$$

В перпендикулярном направлении цепочке источников интенсивность равна  $I(0) = A_0^2 N^2$ , так как при малых углах синусы можно заменить на их аргументы, что полностью согласуется со здравым смыслом – суммарная амплитуда равна  $A_0 N$ , а интенсивность ее квадрату. При

$$\frac{kd}{2} \sin \theta_m = \pi m \Rightarrow \sin \theta_m = \frac{2\pi}{kd} m = \frac{\lambda}{d} m, \text{ где } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (12)$$

интенсивность будет равна  $A_0^2 N^2$ , так как при этих углах аргумент синуса, стоящего в числителе также равен нулю. Но синус в числителе осциллирует чаще в  $N$  раз. Поэтому интенсивность будет обращаться в нуль при условии, что  $\sin \theta_n = \frac{2\pi}{Nkd} n = \frac{n\lambda}{Nd}$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Легко сообразить, что таких нулей между соседними максимумами (при которых и знаменатель равен нулю) будет  $N - 1$ . Между этими нулями будут наблюдаться небольшие максимумы с интенсивностью не более  $A_0^2$ . При числе источников более десяти они практического значения не имеют. На рисунке ниже приведено распределение интенсивности для четырех источников.



Советую при подготовке к экзамену потренироваться рисовать картинки для частных случаев. Чтобы проверить ваше понимание об общей теории, их часто задают в качестве дополнительных вопросов.

Рассмотренный пример многолучевой интерференции лежит в основе двух практически важных устройств. Непосредственно на рассмотренном примере основана, так называемая, радарная гребенка. Во-вторых, эта схема заложена в принцип действия дифракционной решетки, которой будет посвящен следующий параграф. А этот закончим схематичным пояснением, что такое

радарная гребенка.

Но прежде чем переходить к техническому описанию, решим чисто физическую задачу. Предположим, цепочка источников состоит не из источников света, а их радио передатчиков.

В таком случае вполне технически возможно не только их синхронизовать, но сделать, чтобы фаза испускаемой волны изменялась во времени.

Добавим в выражение (10) в показатель экспоненты слагаемое, пропорциональное времени:

$$\frac{A'}{r} \exp[ik(r + nd \sin \theta + \alpha t)] = A_0 \exp[ik[r + n(d \sin \theta + \alpha t)]]$$

Все выкладки останутся прежними, но вместо (12) получим:

$$\sin \theta_m + \alpha t = \pi m \Rightarrow \sin \theta_m = \frac{2}{kd} (\pi m - \alpha t) \quad (13)$$

Максимум, находящийся на перпендикуляре к цепочке источников ( $m=0$ ), при  $t > 0$  начинает перемещаться по окружности радиуса  $r$ . Но скорость его движения не будет постоянной. Для практики это не удобно. Подумаем, как сделать скорость движения постоянной. Ответ будем искать «рабоче-крестьянским» методом, то есть начнем с самого начала. Вместо (10) напишем:

$$\frac{A'}{r} \exp[ik[r + n(d \sin \theta + f(t))]] = A_0 \exp[ik \frac{A'}{r} \exp[ik[r + n(d \sin \theta + f(t))]],$$

$f(t)$  - искомая функция времени, которая должна обеспечить равномерный круговой обзор. Вместо (11) будем иметь:

$$I = A_0^2 \frac{2 - (e^{iNk(d \sin \theta + f)} + e^{-iNk(d \sin \theta + f)})}{2 - (e^{ik(d \sin \theta + f)} + e^{-ik(d \sin \theta + f)})} = A_0^2 \frac{1 - \cos[Nk(d \sin \theta + f)]}{1 - \cos[k(d \sin \theta + f)]} = A_0^2 \frac{\sin^2[\frac{Nk}{2}(d \sin \theta + f)]}{\sin^2[\frac{k}{2}(d \sin \theta + f)]}$$

Условие максимума интенсивности вместо (12) принимает вид:

$$\frac{k}{2}(d \sin \theta_m + f) = \pi m \Rightarrow f(t) = \frac{2\pi m}{k} - d \sin \theta_m \quad (14)$$

Если мы хотим, чтобы радиус, проведенный от цепочки источников в точку наблюдения, имел некоторую постоянную угловую скорость  $\Omega$ , то искомая функция должна иметь вид:

$$f(t) = \frac{2\pi m}{k} - d \sin \Omega t$$

Для проверки подставим ее в первое равенство (14):

$$\frac{k}{2}(d \sin \theta_m + \frac{2\pi m}{k} - d \sin \Omega t) = \pi m \Rightarrow d \sin \theta_m - d \sin \Omega t = 0 \Rightarrow \theta_m = \Omega \cdot t$$

А теперь немного о техническом воплощении и названии. Строится довольно толстая стена около сотни метров высоты и на ней размещается сотня передатчиков, работающих в описанном выше режиме. Возможно один передатчик с распределителем сигнала по сотне расположенных на стене антенн. Я детали не знаю. Дальность действия такого радара возрастает во много тысяч раз. Все это огораживается колючей проволокой на расстоянии несколько километров от такого радара. За высоким забором из колючей проволоки помещается еще один, находящийся под высоким напряжением. На внешнем примерно через пару десятков метров прибиты железные таблички с черепом, такие же, как на трансформаторных будках. Одно такое «чудо» видел в глуши при походе по дальнему Подмосквью. А с названием все ясно, каждая антенна один зубчик гребенки.

## 7. Дифракционная решетка.

Предположим, что плоская волна падает нормально на экран, в котором имеется много одинаковых по ширине щелей, причем расстояния между ними тоже одинаковые. Такое устройство называют дифракционной решеткой. Будем обозначать ширину щели  $b$ , расстояние между ними  $a$ . Сумма этих величин называется постоянной решетки  $d = a + b$ . Наша ближайшая задача определить распределение света за решеткой в зависимости от угла дифракции  $\theta$  (посмотрите на рисунок, который приведен несколько ниже).

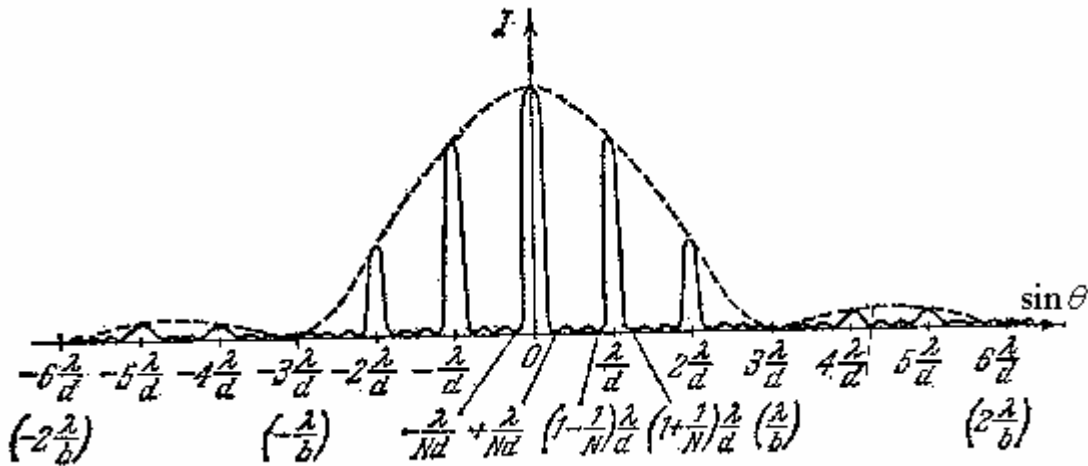
Не представляет особого труда вычислить интеграл (2) для этой геометрии. Но делать этого не стоит, так как при интегрировании по длине решетки мы получим  $N$  интегралов от одной щели, и вычисление дальше сводится к нахождению суммы, по сути такой же, которую



мы находили в предыдущем параграфе. То есть мы сразу можем написать распределение интенсивности в виде произведения двух сомножителей:

$$I(\vartheta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{kb}{2} \sin \theta\right)}{\left(\frac{kb}{2} \sin \theta\right)^2} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{Nkd}{2} \sin \theta\right)}{\sin^2\left(\frac{kd}{2} \sin \theta\right)} \quad (15)$$

Первая дробь – распределение интенсивности от одной щели, вторая – результат суммирования  $N$  щелей. Перед ними стоящая константа пропорциональна интенсивности падающей волны. При очень большом желании ее можно вычислить, но практического смысла это иметь не будет. При обсуждении схематического описания спектральных приборов я поясню это подробно. Проще сначала привести обещанный выше рисунок, а затем объяснить, почему он такой.



Каждый сомножитель (15) мы обсудили в предыдущих параграфах. Пунктирная линия на рисунке представляет собой распределение интенсивности от одной щели шириной  $b$ . Как отмечалось интенсивностью света, кроме попадающего в центральный максимум практически можно пренебречь. Интенсивность всех максимумов от  $N$  источниках одинакова и равна  $I_0 N^2$ , в котором теперь под  $I_0$  надо понимать интенсивность от одной щели. На рисунке всего пять максимумов, имеющих достаточно большую интенсивность.

Они наблюдаются при углах, удовлетворяющих условию  $\sin \theta_m = \pm m \frac{\lambda}{d}$ . При этих углах вторая дробь обращается в единицу. Их количество зависит от соотношения  $b$  и  $d$ . Если  $b = nd$ , то максимальное количество этих максимумов меньше  $n$ . На приведенном рисунке  $b = 3d$ . При таком соотношении третий максимум совпал с нулем от щели. В дальнейшем нам понадобится расположение первых минимумов по обе стороны от максимума  $m$  – порядка. Он получается при углах, удовлетворяющих условиям:

$$\frac{Nkd}{2} \sin \theta_{\min} = n\pi \Rightarrow \sin \theta_{\min} = n\pi \frac{2}{Nkd} = n \frac{\lambda}{Nd} \quad (16)$$

Если ограничиться рассмотрением нулей в интервале от  $m-1$  максимума до  $m+1$  максимума, то  $n$  пробегает значения  $n = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(N-1)$ . Следовательно, близлежащие минимумы будут при углах:

$$\sin \theta_{\min} = \left(m \mp \frac{1}{N}\right) \frac{\lambda}{d} \quad (17)$$

причем верхний знак относится к нулю, расположенному перед максимумом, то есть по направлению к центральному максимуму, и наоборот.

Все остальные подробности, показанные на рисунке, практического интереса не представляют в силу малости интенсивности. Хотя при сдаче экзамена, человеку, который никогда не работал на дифракционных приборах, а выучил это по Савельеву, они могут быть востребованы при вашем ответе.

Центральный максимум называется нулевым порядком, рядом с ним в обе стороны – первым порядком и так далее. Если на решетку падает не монохроматический свет, например, в нем присутствует две разных длины волны, то для обеих длин волн (и вообще

для всех длин волн) в нуле будет максимум. Наблюдая глазом нулевой порядок, мы увидим, что его цвет будет совпадать с цветом источника без решетки. Первые же и последующие порядки для разных длин волн будут находиться под разными углами. Чем меньше длина волны, тем ближе к нулевому порядку находятся спектральные максимумы последующих порядков. Из сказанного ясно, что дифракционная решетка может быть применена для разложения света по длинам волн. Ясно также, что выбор соотношения  $d/b$  определяется тем, в каком порядке мы хотим наблюдать разложенный свет. Далее вы увидите, что от порядка зависит разрешение спектрального прибора. Чем выше порядок, тем больше угол между направлениями дифрагированного света для соседних длин волн.

Есть одно практическое неудобство при использовании решетки для разложения света. Линейчатый спектр атомов лежит в основном в ультрафиолете и видимой области. Напомню школьный курс по атомной физике. Электроны в атомах имеют дискретный набор разрешенных орбит. При переходе с более высокой орбиты на низкую атом излучает фотон определенной частоты. На языке волновой теории света атом излучает цуги волн определенной длины волны. При изучении спектрального состава падающего света может оказаться, что в свете присутствуют две линии длины волн, которых отличается в два раза. В таком случае окажется совпадающими первый порядок  $\lambda_2$  и второй порядок для волны  $\lambda_1 = \lambda_2/2$ , так как для них отношение  $\lambda/d$  одинаковое. Отсесть ультрафиолетовые линии второго порядка, чтобы они не мешали наблюдать длинноволновый спектр в первом порядке проблем нет. Достаточно поставить фильтр из обычного стекла, которое не пропускает ультрафиолет. А вот избавиться от длинноволновых линий первого порядка при наблюдении ультрафиолетовых во втором порядке - это уже проблема, кроме области, где фотоэмульсия теряет чувствительность.

Одними из главных характеристик спектрального прибора являются дисперсия и разрешающая сила. Начнем со второй величины. Тогда будет понятно, почему важна первая. Релей ввел критерий, названный его именем, согласно которому линии считаются разрешенными или нет. На бытовом языке это означает, видим мы две близких линии раздельными или они так сливаются, что мы не догадываемся, что их две. Релей предложил считать линии разрешенными, если максимум линии одной длины волны совпадает с минимумом длины волны. Условие максимума линии, имеющей большую длину волны  $d\lambda + \delta\lambda$  в  $m$ -ом порядке определяется как

$$\sin \theta_{\max} = m \frac{\lambda + \delta\lambda}{d}$$

Угол, при котором для нее находится минимум в сторону центрального максимума, согласно (17) равен (см. рис.):

$$\sin \theta_{\min} = \left(m - \frac{1}{N}\right) \frac{\lambda + \delta\lambda}{d}$$

Если при этом угле, но не большем, находится максимум более коротковолновой линии, то есть при этом угле

$$\sin \theta_{\min} = m \frac{\lambda}{d}$$

то линии считаются разрешенными. Приравнивая левые части двух последних равенств, получим:

$$\left(m - \frac{1}{N}\right) \frac{\lambda + \delta\lambda}{d} = m \frac{\lambda}{d} \Rightarrow \left(m - \frac{1}{N}\right) \delta\lambda - \frac{1}{N} \lambda = 0 \Rightarrow \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN$$

Величиной  $1/N$  конечно можно пренебречь.

Разрешающей силой дифракционной решетки называется безразмерная величина:

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN \quad (18)$$

Сделаем оценку для средней решетки:  $N = 5 \cdot 10^4$  для  $\lambda = 5 \cdot 10^{-5} \text{ см}$ . В первом порядке получаем  $\delta\lambda = 10^{-9} \text{ см}$ . Если разность длин волн двух линий не меньше полученного числа, то они будут разрешены, то есть будет понятно, что наблюдаемая картина – это две частично перекрывающихся линий.

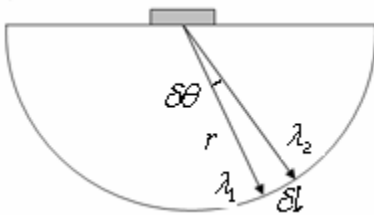
Перейдем к дисперсии прибора. Различают две дисперсии: угловую и линейную. Угловая дисперсия определяется как отношение:

$$D = \frac{\delta\theta}{\delta\lambda} \quad (19)$$

Если из этой формулы выразить  $\delta\theta$ , то угловая дисперсия будет коэффициентом пропорциональности перед разностью длин волн. То есть при заданной разности длин волн очень близких спектральных линий, разность углов, под которыми они будут наблюдаться, будет тем больше, чем больше дисперсия, и тем легче их наблюдать. Выразим угловую дисперсию через параметр решетки и порядок наблюдения спектра:

$$\sin \theta_{\max} = m \frac{\lambda}{d} \Rightarrow \cos \theta d \theta = m \frac{\delta\lambda}{d} \Rightarrow \frac{\delta\theta}{\delta\lambda} = \frac{m}{d \cos \theta} \quad (20)$$

Таким образом, угловая дисперсия прямо пропорциональна (для конкретной решетки) порядку, в котором наблюдается спектр. При малых углах можно пользоваться приближенным выражением:



$$D = \frac{m}{d}$$

Если на расстоянии  $r$  поставить цилиндрический экран (см. рис. вид сверху, размер решетки сильно увеличен), то для близких двух волн  $\delta\lambda \ll \lambda$  их максимумы на экране будут находиться на расстоянии

$$\delta l = r \delta\theta$$

Воспользовавшись соотношением (20), получим:

$$\delta l = r \frac{m \delta\lambda}{d \cos \theta}$$

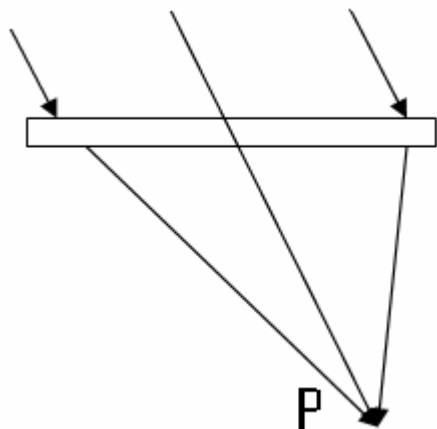
Линейной дисперсией по определению называется отношение:

$$D_{\text{лин}} = \frac{\delta l}{\delta\lambda} = r \frac{m}{d \cos \theta} = rD \quad (21)$$

Мы связали линейную дисперсию с угловой через расстояние от решетки до экрана. В учебнике спектр решетки фокусируется собирающей линзой, дисперсии связываются между собой через фокусное расстояние линзы. Я специально избегал при рассмотрении всего материала о дифракционной решетке введения линзы. Конечно, в учебнике все правильно выведено, беда только в одном, решеток для оптического диапазона, работающих на просвет, а не на отражение просто не существует. Как выражаются математики, теория построена для пустого множества. И последнее замечание по предыдущему. Как видите, в линейную дисперсию вошла величина, характеризующую не решетку, а прибор. Ведь расстояние до экрана - это параметр прибора, а не решетки.

Поэтому необходимо хотя бы схематично рассмотреть устройство спектрального прибора с дифракционной решеткой. Но прежде, чем переходить к прибору, надо рассказать, что собой представляет реальная решетка, а не ее модель, которую мы до сих пор рассматривали. Ширину щели, как вы уже поняли, следует сделать как можно меньше. Снизу ее размер ограничен длиной волны света, на которую рассчитан прибор. При ширине щели меньше длины волны вся теория становится некорректной. Если взять длину волны примерно в середине видимой области, то можно ее положить равной  $\lambda = 5 \cdot 10^{-5} \text{ см}$ . Следовательно, на одном миллиметре можно нарезать около 1000 щелей. Но на одном миллиметре никто не возьмется сделать и сто прорезей. Поэтому решеток для оптической области, работающих на просвет, не существует. Все решетки работают на отражение света. Мне лично не приходилось иметь дело с решетками больше 1300 штрихов/миллиметр. Как правило, подложка решетки - стеклянная пластина толщиной около двух сантиметров, на которой нарезают штрихи (царапины) алмазным резцом. Длина нарезанной части 10 – 15 см. Как видите, количество штрихов сотни тысяч. Быстро это не сделаешь. Поэтому помещение термостатируется, и вход в него запрещен, пока идет нарезка. Станок ставится в подвальном помещении на отдельный фундамент, чтобы не сказывалась вибрация многоэтажного здания. Лучшие решетки в советские времена изготовлялись в Гос. Опт. Институте (тогда г. Ленинград).

Но прежде чем рассматривать схему прибора, надо понять, как использовать решетку, в которой нет щелей. Можно сообразить, что если нельзя ее использовать на просвет, то остается только использовать отражение света. Следовательно, отражающие полоски будут



играть роль щелей, а не отражающие – роль промежутков между щелями. Но практически неудобно наблюдать отраженный свет, если свет падает на решетку перпендикулярно ее плоскости. Следовательно, надо рассмотреть косо падение света. Проще опять рассмотрение провести на решетке со щелями. Все выводы и формулы останутся фактически прежними, но только нулевой порядок будет виден по направлению точки  $P$  (эта точка лежит на бесконечно большом расстоянии от решетки), в которую придут все дифрагированные волны в одной фазе. Естественно центральная линия на рисунке является прямой.

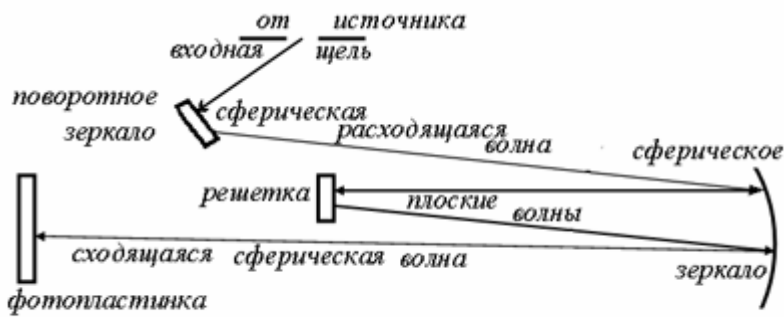
Вы же хорошо знаете, еще со школы, как отражаются свет от плоского зеркала. А «полосатое» оно или нет, не имеет значения. Поэтому направление на нулевой порядок, да и на все остальные находятся по правилам геометрической оптики: угол падения равен углу отражения. Вот теперь можно переходить к реальностям.

Первая неприятность, мы в эксперименте не имеем дела ни с плоскими волнами, ни с точечными источниками. Понятно, что если на решетку падает несколько плоских волн даже одинаковых по спектральному составу, под малыми, но различными направлениями то направления на нулевой порядок (и все остальные) после решетки окажутся тоже под разными направлениями, и мы не получим разрешенных близких по длине волны линий. Вторая неприятность, все источники имеют размер. Поэтому, если от некоторой малого объема источника и можно при помощи линзы сделать плоскую волну, то от другой точке плоская волна пойдет под другим углом. Вспомните, что пришлось сделать Юнгу, чтобы наблюдать интерференцию от двух щелей? Поставить диафрагму между источником света и экрана со щелями. То же самое делается во всех спектральных приборах. На диспергирующий элемент, призму или решетку, свет падает не на него, а на входную щель очень малого размера. Эта щель как бы является точечным источником. Практически во всех спектральных приборах с дифракционной решеткой свет от щели падает не на линзу, а на сферическое зеркало, причем щель располагается в фокусе зеркала. Причин использовать зеркало, а не линзу много. Главные: зеркало размером несколько десятков сантиметров легче, чем такого же размера линзу; линза даже из кварца в далеком ультрафиолете сильно поглощает свет, зеркало поверхностного напыления свет отражает гораздо лучше. На отражение можно работать даже в области вакуумного ультрафиолета, если создать вакуум от источника до приемника регистрации дифрагированного света. Плоская волна от зеркала падает на решетку, отражается от нее и снова падает на зеркало, в фокусе которого стоит приемник. При получении спектров с большим разрешением приемником является фотопластинка, расположенная в фокальной плоскости зеркала. Поэтому в таком случае в формуле (21) для линейной дисперсии стоит фокусное расстояние зеркала:

$$D_{\text{лин}} = \frac{\delta l}{\delta \lambda} = R \frac{m}{d \cos \theta} = RD \quad (22)$$

Спектроскописты используют не дисперсию, а обратную величину, часто в своем жаргоне опускают слово обратная. Приведу числовые значения обратной дисперсии. Для хорошего прибора она составляет 6 – 1 ангстрем на миллиметр. Это означает, что две спектральные линии с длинами волн, отличающихся на  $10^{-8}$  см, будут находиться на фотопластинке на расстоянии 1 мм. Такой прибор имеет фокусное расстояние зеркала несколько метров, решетку с более чем 1000 штрихов на миллиметр, спектр снимается во 2-4 порядке, угол падения света на решетку достаточно большой. В заключение на рисунке показана схема прибора (вид сбоку). Входная щель прибора вынесена вверх для наглядности. В приборе она за поворотным зеркалом по перпендикуляру к плоскости рисунка. Решетку вращают вокруг вертикальной оси для выбора спектральной области для фотографирования.

Может возникнуть законный вопрос. При повороте решетки от перпендикулярного падения падающей на нее волны она должна отражать в обратном направлении. А как быть с законом отражения? Ответ: а кто вам сказал, что плоскости отражающих полосок совпадают с плоскостью решетки? Профиль штрихов решетки делают таким, чтобы она отражала максимум света в определенный порядок.



Совсем кратко об измерениях интенсивности отдельных спектральных линий. В формуле для решетки стоит неопределенная константа. Ее вычисление не имеет

смысла, так как рассчитать какая доля света из выделенного объема источника попадет на пластинку практически невозможно. Тем более что полученные почернения на фотопластинке не есть интенсивности. Поэтому на одну и ту же пластинку, в той же геометрии снимается спектр эталонного источника, распределение интенсивности, в спектре которого известна.

Вот и закончили дифракцию. Между прочим, параграф в учебнике правильнее назвать «дифракция на N щелях», а не дифракционная решетка.